

在 LTspice 中應用拉普拉斯變換對傳遞函數進行建模

傳遞函數用於電子系統的設計，例如濾波器、電源和其他控制系統。傳遞函數的頻域分析涉及到拉普拉斯變換。本文探討 LTspice 中的傳遞函數實現方案，將理想的回應與建模的實現方案進行比較，並提供多個有用示例。有一些檔案可以協助理解和實踐本主題。

■作者：Joseph Spencer / ADI 現場應用工程師

簡介

當我們想要分析一個系統的輸出如何隨輸入變化時，會使用傳遞函數。這個系統可以是電阻分壓器的輸出電壓，也可以是您在踩油門時汽車的速度。為了分析系統，我們需要瞭解，當與頻率範圍內的輸入比較時，其輸出振幅和相位如何。為此，我們使用拉普拉斯變換。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

目前有許多資源對拉普拉斯變換的數學邏輯和直覺性都展開了探討。為了達到我們的目的，我們可以把它看成一個數學工具，它讓我們能夠操作增

圖 1：傳遞函數。

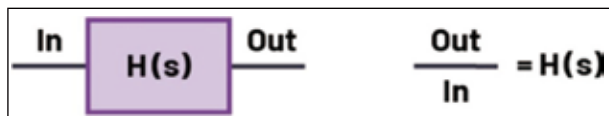
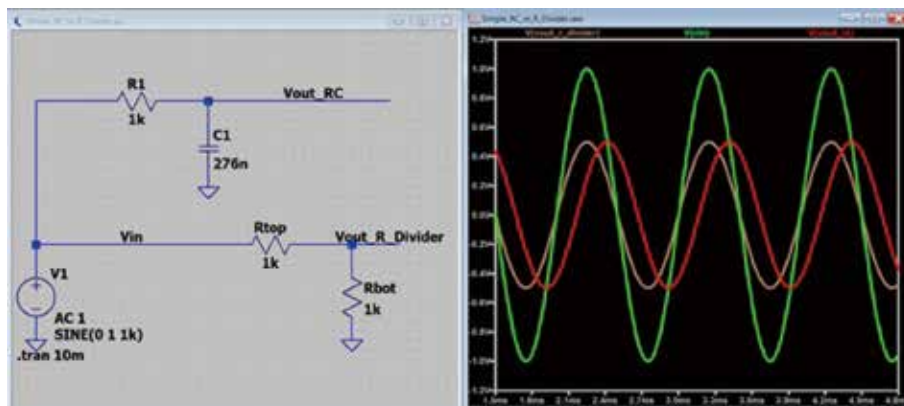


圖 2：電阻分壓器和 RC 電路都將振幅降低一半，其中 $f = 1 \text{ kHz}$ 。RC 電路還會導致延遲。



益、頻率、相位和系統的指數回應。

圖 1 顯示了傳遞函數的基本思路。

圖 2 顯示了兩個不同的傳遞函數。電阻分壓器可以簡單表述為：

$$H(s) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

RC 電路則使用稍複雜一些的公式 2 進行表述：

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2)$$

透過以這種形式來表述傳遞函數，我們可以從極點與零點角度來討論。這裡，在 $\omega_p = 1/RC$ 對應的位置有一個極點。雖然 RC 電路（紅色曲線）的 1 kHz 輸出與電阻分壓器的振幅相同，但其相位延遲較為明顯。透過使用拉普拉斯變換，我們可以表述 RC 電路的增益和相位如何隨頻率變化。可以參

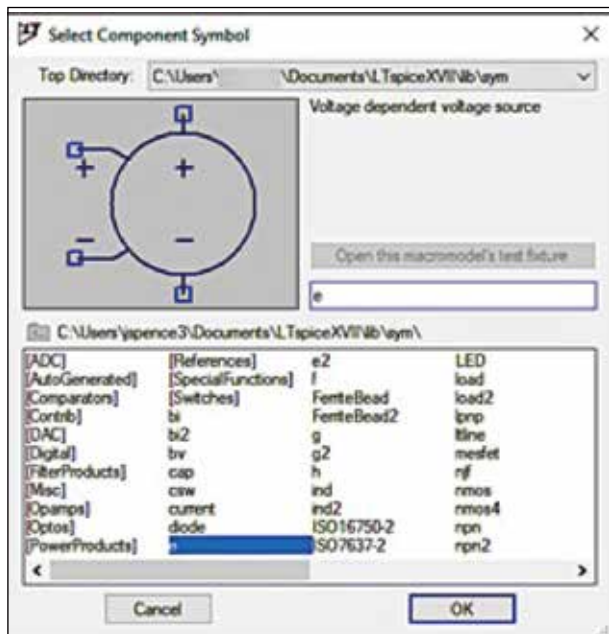
考示例檔 Simple_RC_vs_R_Divider.asc。¹

LTspice 中的拉普拉斯變換語法

要在 LTspice 中實現拉普拉斯變換，首先要在示意圖中加入一個與電壓相關的電壓源。其對話方塊如圖 3 所示。

右鍵點擊電壓源元素，打

圖 3：加入一個與電壓相關的電壓源。



開元件屬性編輯器。在值欄位中，輸入 "Laplace = "，後接您的公式，其中應包含複變數 "s"。

在圖 4 中，{C} 和 {R} 包含在大括弧中，所以我們可以使用 .step spice 命令來重複使用某些值。

圖 5 模擬顯示一個 RC 阻抗分壓器的階躍回應，以及使用拉普拉斯變換表述的對等傳遞函數。運行模擬，² 我們可以看到，兩個輸出是匹配的。

在傳遞函數增大的過程中，我發現使用代碼編輯器非常有用，它可以自動重點顯示匹配的括弧。在文字編輯器中輸入公式，然後將其複製到 LTspice

圖 5：一個簡單的 RC 電路，以及對等的拉普拉斯變換。

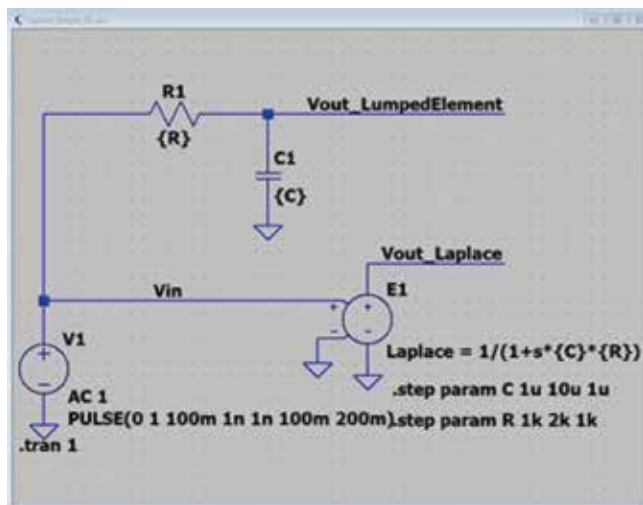


圖 4：在值欄位中輸入公式。

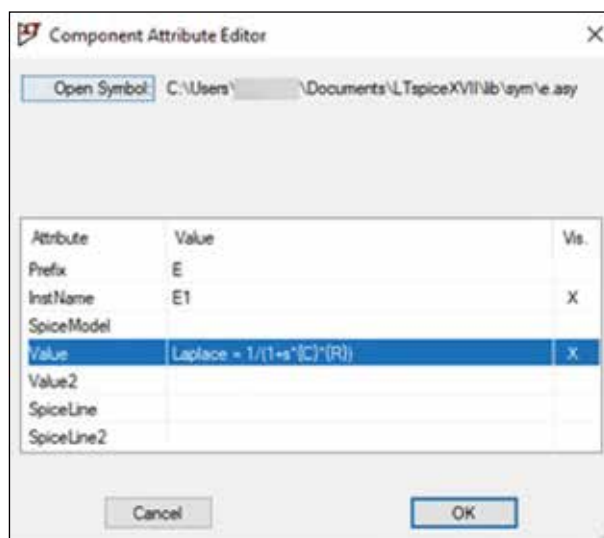


圖 6：利用文字編輯器的語法重點顯示功能。

1 Laplace = 1/(1+s*{C}*{R})

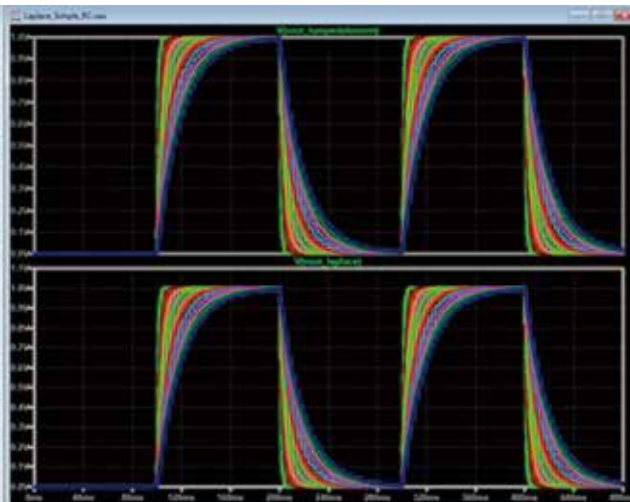
對話方塊中。參見圖 6。

關於極點和零點的回顧

公式 3 提供了一個傳遞函數示例。

$$H(s) = \frac{\omega_{p0}}{s} \times \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (3)$$

拆解公式 3 的各個部分，我們首先會看到 ω_{p0}/s 項。這表示一個原極點。原極點與積分器同義，用以在低頻率下提供極高增益，從而消除控制系統中的穩態誤差。原極點產生恆定的 90° 相位延遲，



以及 -20 dB/十倍頻程 的增益回應。 ω_{p0} 項表示增益因為原極點滾降至 0 dB 時的頻率。

求分子和分母的根可以分別得出零點和極點頻率。注意極點 / 零點頻率是由這些根的幅度 (即絕對值) 提供的。零點導致產生 90° 相位增幅, 且其頻率周圍的增益增大。極點導致產生 90° 相位延遲, 且其頻率周圍的增益降低。

如果將示例傳遞函數表述為:

圖 7: 極點和零點的實現。

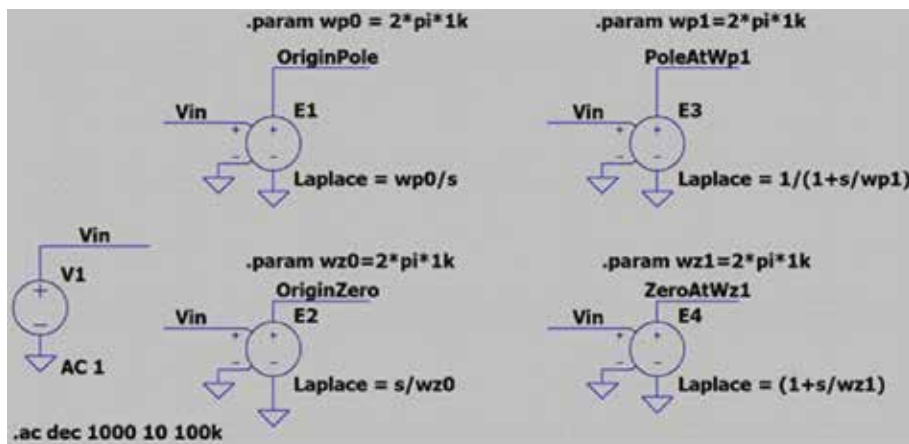
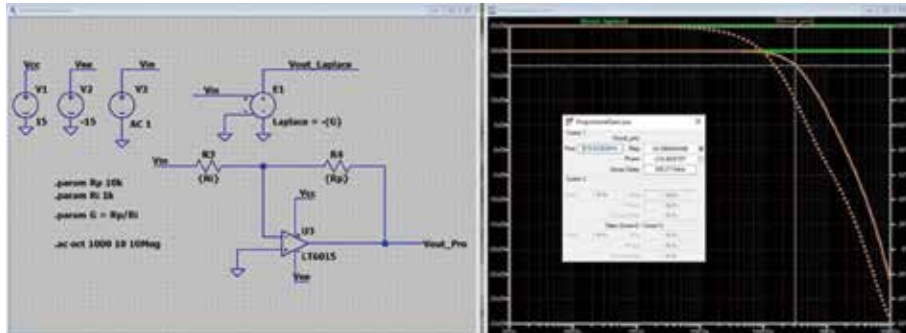


圖 8: 極點和零點 (均在 1 kHz 頻率下) 的頻率和相位回應。



圖 9: 比例增益。



$$H(s) = \frac{s}{\omega_{z0}} \times \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (4)$$

最前方的 "s" 項現在表示原點處的零點。原點處的零點是純微分器的代表。它具有恆定的 90° 相位增幅, 增益隨頻率增大, 在頻率為 ω_{z0} 時達到 0 dB 增益。

在圖 7 所示為這些不同極點和零點的實現。每個實現方案的頻率都為 1 kHz 。得出的每個

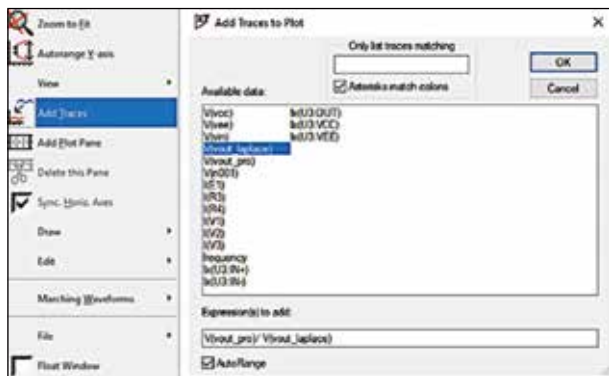
實現方案的增益和相位如圖 8 所示。可以參考示例檔 PoleZeroExamples.asc。³

比較理想和建模的實現方案

透過使用 LTSpice 來對傳遞函數進行建模, 您可以利用龐大的建模元件庫。在第一個示例中, 我們來看看提供比例增益的反相運算放大器。在理想實現中, $H(s) = -R_p/R_i$ 。這應該會導致簡單的輸入電壓縮放, 以及 180° 相移。但如圖 9 所示, 在約 320 kHz 時, 對比理想增益, 增益滾降 3 dB , 且相位發生了明顯偏移。其推斷依據是 LT6015 的增益頻寬為 3.2 MHz , 圖 9 所示電路的增益為 -10 V/V 。

在 LTSpice 中, 您可以在波形檢視器中輸入您自己的公式。如果我們想要查看理想公式與運算放大器電路的增益和相位差, 那麼我們可以增加新波形。操作方式為, 右鍵點擊波形檢視器, 然後選擇增加曲線。然後, 可以增加運算式, 以得到一個節點除以另一個節

圖 10: 增加計算出的波形。



點 (即 $V(vout_pro)/V(vout_laplace)$) 的繪圖。參見圖 10。

其增益和相位比較如圖 11 所示，從圖中很明顯可以看出，在低頻率下，增益差為 0 dB，無相位差。可以參考示例檔 `ProportionalGain.asc`。⁴

二階 RLC 系統

Simon Bramble 的文章「二階系統電子控制理論：為工程師提供的實用分析」提供了二階系統

圖 11: 比較兩個波形的增益和相位。

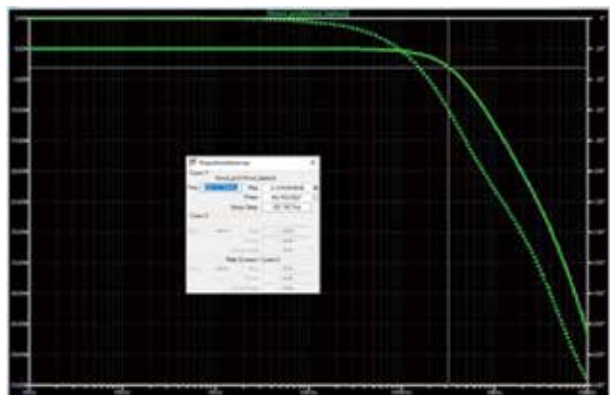
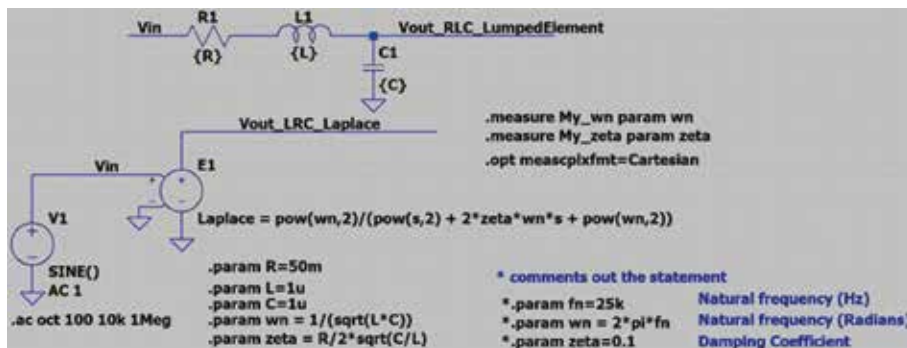


圖 12: 二階 RLC 系統。



的一般形式。⁵

$$H(s) = \frac{\omega \frac{2}{n}}{s^2 + 2\zeta W_n + \omega \frac{2}{n}} \quad (5)$$

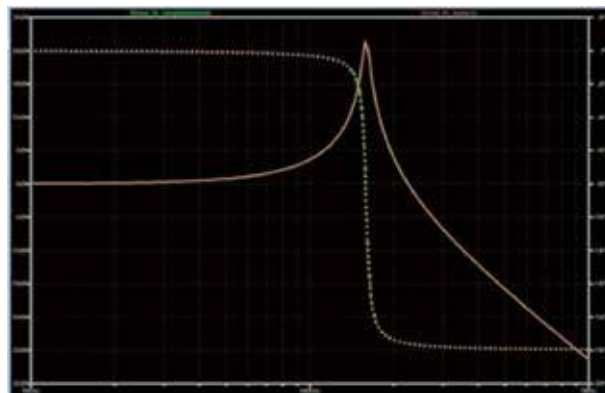
當表示為 LRC 時，我們可以使用以下公式：

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \times \sqrt{\frac{C}{L}}$$

LTspice 實現方案如圖 12 所示。在該示例中，您可以指定 R 、 L 和 C ，或者，您可以指定阻尼因數 ζ 和諧振頻率 ω_0 。

這個二階系統的頻率回應如圖 13 所示。圖中所示的峰化通常不可取，在進行設計時，例如，為降壓穩壓器設計輸入 EMI 濾波器時，通常需要對這一峰化進行衰減。可以參考示例檔 LRC_AC_Analysis.asc。⁶

圖 13:RLC 頻率回應。



微分器和安全極點

微分器如圖 14 所示。

和預期的一樣，原點處的零點導致增益在頻率範圍內增加 20 dB/十倍頻程。微分器用於提升對高頻率訊號的回應。實際上，我們並不會使用純微分器，而是會在實現過程中加入一個安全極點。加入安全極點是為了使系統不會對高頻率雜訊太過敏感。此外，請注意運算放大器實現方案中顯示的諧振峰值。在嘗試控制系統時，這個峰值最終可能會造成問題。

圖 14: 微分器。

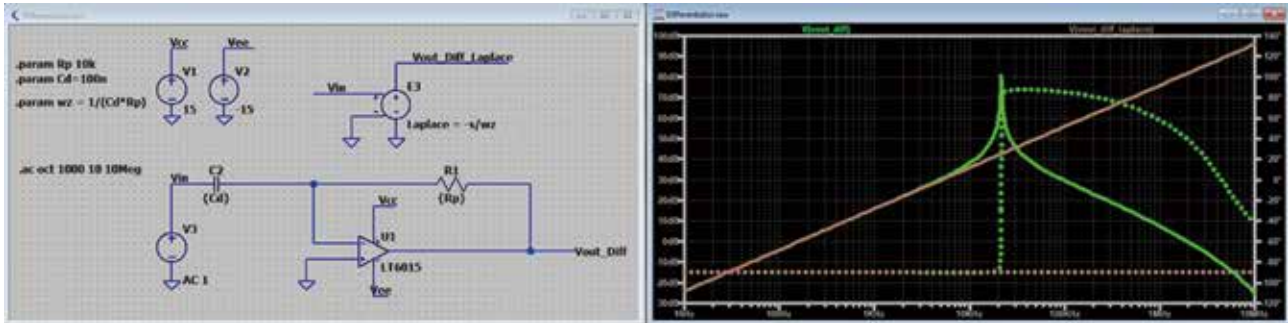


圖 15: 包含安全極點的微分器。

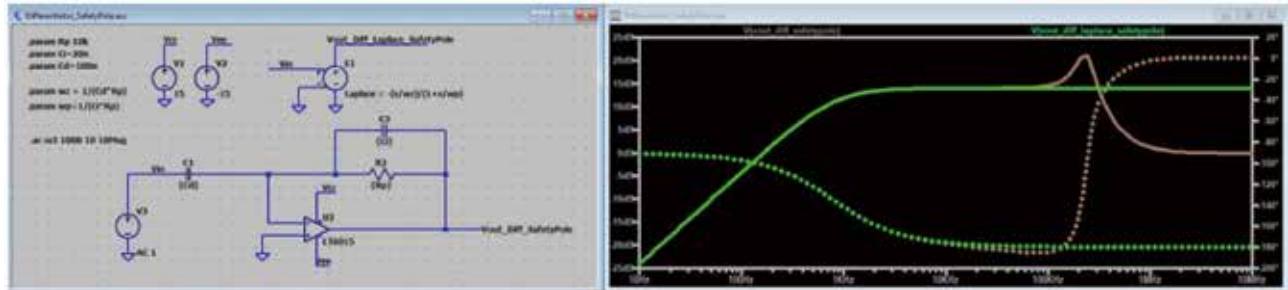


圖 14 所示的實現方案會在以下頻率時達到零 (增益達到 0 dB)

$$f_z = \frac{1}{2\pi \times 100 \text{ nF} \times 10 \text{ k}\Omega} = 159 \text{ Hz} \quad (6)$$

在我們的示例中，安全極點在此值的 5 倍處實現。圖 15 顯示包含安全極點的微分器實現方案。我們所需的極點頻率為 $5 \times 159 \text{ Hz} = 796 \text{ Hz}$ 。為了實現這個頻率，我們會使用電容值為輸入電容的 1/5 的回饋電容。計算整個傳遞函數的公式為：

$$H(s) = \frac{-s}{\omega_z} \times \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (7)$$

其中 $\omega_z = 1/R_p C_d$ ， $\omega_p = 1/R_p C_i$ 。模擬 (參見圖 11) 顯示，在接近極點頻率時，該安全極點會將增益和相位雙雙降低。由運算放大器導致的峰化也會降低。

一階加延遲 (FOPD)

在對系統的行為建模時，FOPD 模型是一個有用工具。有關更完整的說明，請閱讀 John D. Hedengren 博士的「動態過程建模」報告。⁷ 簡而言之，過程可以用固定延遲、滿量程回應和時間常

數來描述。要實現固定延遲，我們會利用下方的拉普拉斯變換：

$$L\{\delta(t - \tau)\} = e^{-\tau \times s} \quad (8)$$

注意，時間常數由 $1 - 1/e = 63.2\%$ 定義。FOPD 模型表示為：

$$H(s) = \frac{k_{pf}}{1 + s \times \tau_F} e^{-s\theta_F} \quad (9)$$

k_p = 滿量程輸出

τ_F = 時間常數

θ_F = 時間延遲

圖 16 顯示的是滿量程為 100、時間常數為 10 s、延遲為 1 s 的系統實現方案。因為是在 $t = 1 \text{ s}$ 時應用輸入階躍，所以緊接著在圖 17 中 $t = 12 \text{ s}$ 時，輸出為 63.2 V。可以參考模擬檔 FOPD.asc。⁸

圖 16: 一階加延遲模型。

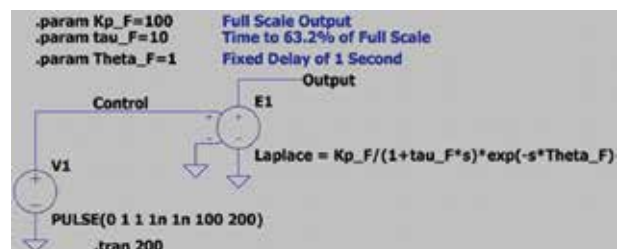
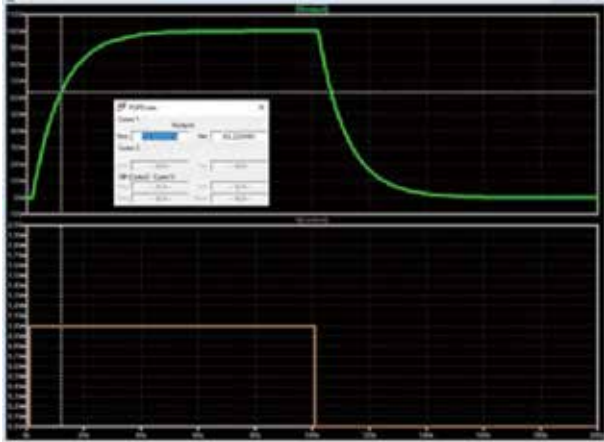


圖 17: 對輸入階躍的一階加延遲回應。



在 LTspice 中設計補償器

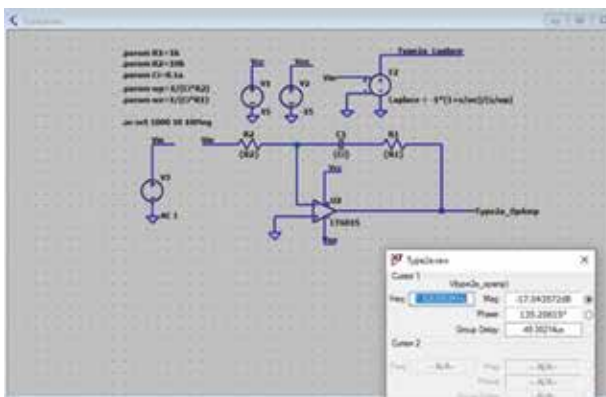
控制系統設計是跨越多個學科的複雜領域。補償器是閉迴路控制系統的一個關鍵組成部分。在得出被控系統的傳遞函數之後，就需要設計補償器來調節增益和相位，使閉迴路電路實現穩定性和高性能。

PI(2a 型) 補償器

許多系統可以使用 2a 型補償器進行補償，它由原極點 (積分器) 和一個零點構成。負反饋提供 180° 相位延遲，而原極點另外導致 90° 固定延遲。透過加入一個零點，可以在更高頻率下消除這個額外的 90° 相移。透過使用這種方法，我們可以確定在特定頻率下需要多少相移，並據此增加零點。

基於運算放大器的 2a 型控制器如圖 18 所示。2a 型傳遞函數可以表示為：

圖 18: 基於運算放大器的 2a 型補償器。



$$H(s) = -\frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{\frac{s}{\omega_p}} \quad (10)$$

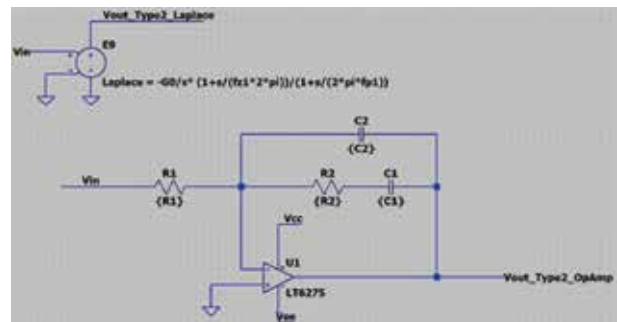
原極點頻率公式為 $\omega_p = 1/R_2C_1$ ，零點頻率為 $\omega_z = 1/R_2C_2$ 。

在此情況下，運算放大器的作用很明顯，導致增益和相位在更高頻率下相比理想值雙雙滾降。可以參考示例檔 Type2a.asc。⁹

2 型補償器

2 型補償器由一個原極點和一個極點 / 零點對構成，表現形式如圖 19 所示。

圖 19: 2 型補償器。



計算傳遞函數的公式為：

$$H(s) = -\frac{G_0 \left[1 + \frac{s}{\omega_{z1}} \right]}{s \left[1 + \frac{s}{\omega_{p1}} \right]} \quad (11)$$

極點 / 零點的位置為：

$$\omega_{z1} = \frac{1}{R_2 C_2}, \quad \omega_{p1} = \frac{1}{R_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}, \quad G_0 = \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} \quad (12)$$

此時，設計人員會面臨一個兩難的情況。R 和 C 的選擇對極點和零點都會產生影響。此外，還需

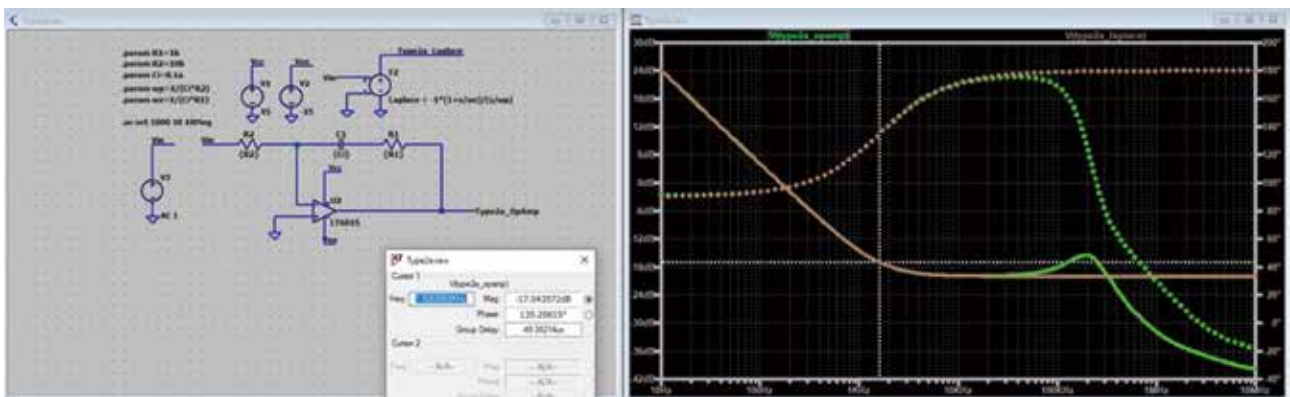
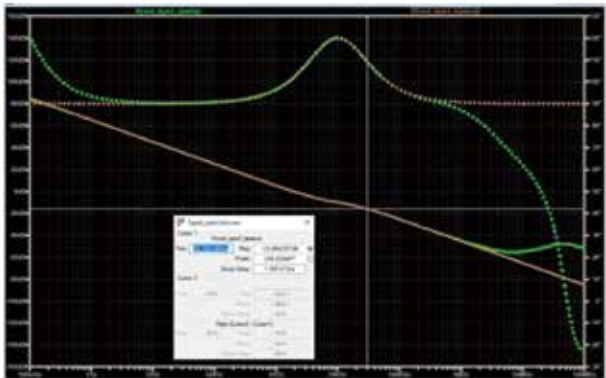


圖 20:2 型相位和頻率回應。

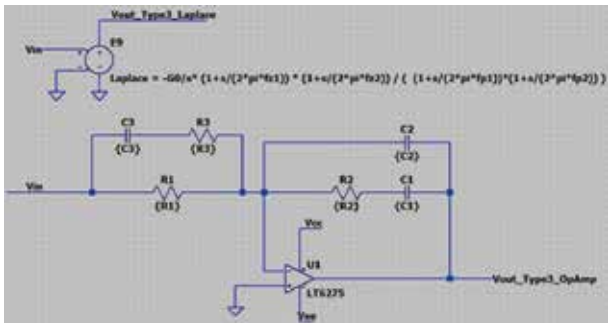


要確定加入極點和零點的位置。《設計線性和切換電源的控制迴路》一書推導了如何完成設計過程，並提供了一個相關示例。為了幫助讀者理解，我們在 LTspice 示例檔 Type2_autoCalcs.asc 中採用並說明了此方法。¹⁰ 該示例的輸出如圖 20 所示。該示例達成了在 10 kHz 時實現 10 dB 衰減和 30° 相位增幅的目標。和之前一樣，運算放大器在更高頻率下會顯示出其非理想特性。

3 型補償器

3 型補償器的表現形式如圖 21 所示。

圖 21:3 型補償器。



實現這個更複雜的傳遞函數是為了獲得更大的相位增幅。負反饋提供 180° 初始延遲。但是現在，我們能夠使用兩個零點，可以將相位增加 180°。透過加入兩個極點使高頻率增益和相位出現滾降。計算傳遞函數的公式為：

$$H(s) = -\frac{G_0 \left[1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right] \left[1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right]}{s \left[1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right] \left[1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right]} \quad (13)$$

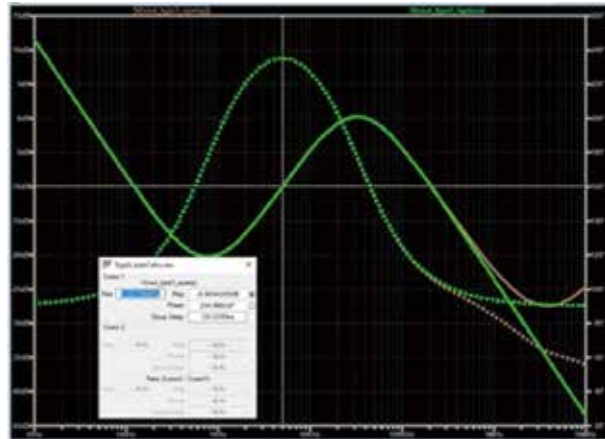
極點 / 零點的位置為：

$$G_0 = \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} \quad \omega_{z1} = \frac{1}{R_1 C_2} \quad \omega_{z2} = \frac{1}{(R_1 + R_3)C_3} \quad (14)$$

$$\omega_{p1} = \frac{1}{C_1 C_2 R_2} \quad \omega_{p2} = \frac{1}{R_3 C_3}$$

與 2a 型補償器一樣，涉及到選擇極點 / 零點位置，然後計算 R 和 C 的過程。《設計線性和開關電源的控制迴路》一書推導了如何完成設計過程，並提供了一個相關示例。為了幫助讀者理解，我們在 LTspice 示例檔 Type3_autoCalcs.asc 中採用並說明了此方法。¹¹ 該示例的輸出如圖 22 所示。該示例達成了在 5 kHz 時實現 10 dB 衰減和 145° 相位增幅的目標。和之前一樣，運算放大器在更高頻率下會顯示出其非理想特性。

圖 22:3 型補償器回應。



時域中的原極點

到目前為止，我們已經展示了 LTspice 如何利用電路元件和拉普拉斯變換來實現傳遞函數。所展示的示例採用的均是頻域。接下來自然可以在時域（即階躍回應）中分析這些傳遞函數。

為此，我們需要解決原極點和如何實現的問題。包含原極點（即純積分器）的傳遞函數為 $H(s) = 1/s$ 。這個傳遞函數在頻域（圖 23）中運行正常，但在時域中會出錯（圖 24）。

為了解決這個問題，我們可以改為使用行為電壓源和 idt() 函數。此方法如圖 25 所示。圖 25 還提供了回饋系統的開頭部分，它比較了對靜態回

圖 23: 原極點的 AC 分析運行正常。

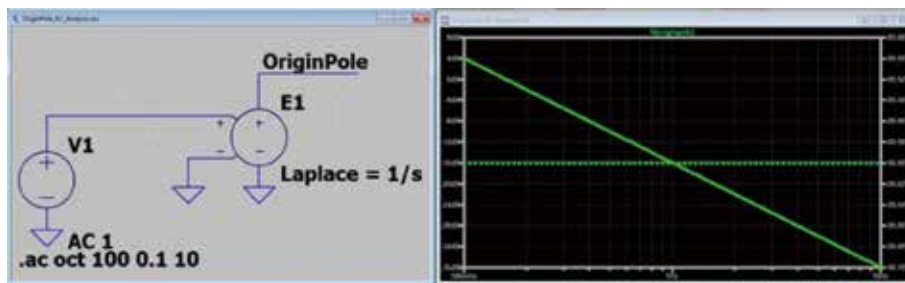


圖 24: 原極點瞬態分析失敗。

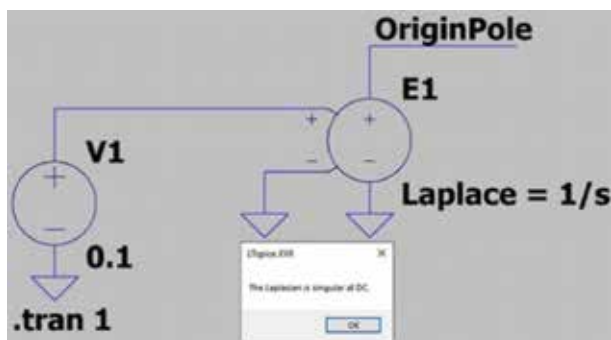
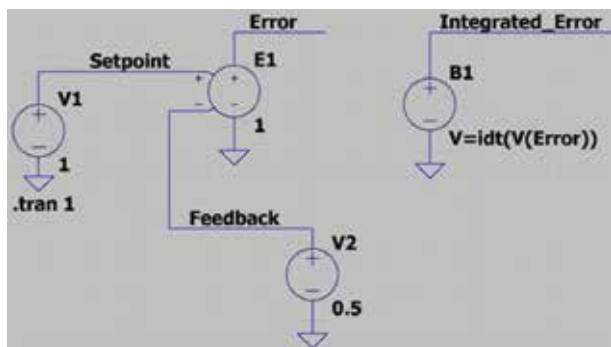


圖 25: 可在時域中正常運行的積分。



饋電壓的阻礙作用。可以參考示例檔 OriginPole_TransientAnalysis_idt.asc。¹²

濾波器設計

《線性電路設計手冊》¹³ 只是 ADI 提供的龐大教育材料庫中的一部分。該書第 8 章探討了類比濾波器。本章中探討的濾波器拉普拉斯標記法已作為示例檔 Laplace_Filters_LinearSystemsBook.asc 提供。¹⁴ 請參考 Precision Toolbox 中關於濾波器設計的部分，取得有關設計有源濾波器之協助。¹⁵

結論

本文透過比較集總元件標記法和基於拉普拉斯變換的公式，就如何實現傳遞函數提供了大量示例。這些示例作為教育材料的目的是將課堂理論和電路實現結合起來，為各種補償器的實際設計提供協助。需要注意的是，對於切換模式電源，LTpowerCAD 是一種強大 (且優選的) 的補償設計資源。¹⁶ 雖然 LTspice 可能會被用於設計和理解某些補償器，但在設計電源時，LTpowerCAD 才是適合此項工作的工具。

參考電路

- ¹ Simple_RC_vs_R_Divider.asc。ADI
 - ² Laplace_Simple_RC.asc。ADI
 - ³ PoleZeroExamples.asc。ADI
 - ⁴ ProportionalGain.asc。ADI
 - ⁵ Simon Bramble。「二階系統電子控制理論：為工程師提供的實用分析」。《類比對話》，第 54 卷第 3 期，2020 年 9 月。
 - ⁶ LRC_AC_Analysis.asc。ADI
 - ⁷ John D. Hedengren。「動態過程建模。」
 - ⁸ FOPD.asc。ADI
 - ⁹ Type2a.asc。ADI
 - ¹⁰ Type2_autoCalcs.asc。ADI
 - ¹¹ Type3_autoCalcs.asc。ADI
 - ¹² OriginPole_TransientAnalysis_idt.asc。ADI
 - ¹³ 《線性電路設計手冊》。ADI，2008 年。
 - ¹⁴ Laplace_Filters_LinearSystemsBook.asc。ADI
 - ¹⁵ ADI Precision Studio。ADI
 - ¹⁶ Henry Zhang。「應用筆記 149：切換模式電源的模型和迴路補償設計。」凌力爾特，2015 年 1 月。
- Basso, Christophe。設計線性和切換電源的控制迴路，設計線性和切換電源的控制迴路
- Differentiator_SafetyPole.asc。ADI
- Type3_autoCalcs_steps.asc。ADI
- 致謝：模擬均是透過 LTspice 完成。感謝科羅拉多大學博爾德分校 Shalom D. Ruben 博士對本文的指導。